Лекция 15 ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной (см. п. 25.4).

Пусть функция $z = f\ (x;\ y)$ определена в некоторой области D, точка $(x_0; y_0) \in D$.

Точка $(x_0;y_0)$ называется точкой максимума функции $z = f(x; y)$,

если существует такая δ-окрестность точки $(x_0;\ y_0)$, что для каждой точки $(x;y)$, отличной от $(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $(x;y) < f\ (x_0;y_0)$.

Аналогично определяется тонка минимума функции: для всех точек $(x;\ y)$, отличных от $(x_0;\ y_0)$, из δ-окрестности точки $(x_0;y_0)$ выполняется неравенство: $f\ (x;y) > f\ (x_0;y_0)$.

На рисунке 210: N_1 — точка максимума, N_2 - точка минимума функции $z = f\ (x;y)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют ее экстремумами.

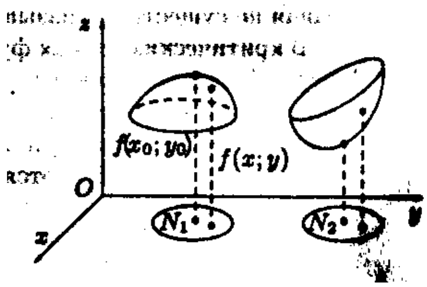

Рис. 210

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный (местный) характер: значение функции в точке $(x_0;y_0)$ сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к $(x_0;y_0)$. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

§ 2 Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема 46.1 (необходимые условия экстремума). Если в точке $N(x_0;y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f_x^{/}(x_0; y_0) = 0,\quad f_y^{/}(x_0; y_0) = 0.$

Зафиксируем одну из переменных. Положим, например, $y = y_0$. Тогда получим функцию $f(x;y_0) = \varphi(x)$одной переменной, которая имеет экстремум при $x = x_0$. Следовательно, согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной (см. п. 25.4), $\varphi'(x_0) = 0$, т. е. $f_x^{/}(x_0; y_0) = 0.$

Аналогично можно показать, что $f_y^{/}(x_0; y_0) = 0.$

Геометрически равенства $f_x^{/}(x_0;y_0)=0$ и $f_y^{/}(x_0;y_0)=0$ означают, что в точке экстремума функции $z = f(x;\ y)$ касательная плоскость к поверхности, изображающей функцию $f(x;\ y)$, параллельна плоскости Oxy, т. к. уравнение касательной плоскости есть $z = z_0$ (см. формулу (45.2)).

Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция

$z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$ имеет максимум в точке O(0; 0) (см. рис. 211), но не имеет в этой точке частных производных.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции

$z = f(x;\ y)$ равны нулю, т. е. $f_x^{/}=0$, $f_y^{/}=0$, называется стационарной точкой функции z.

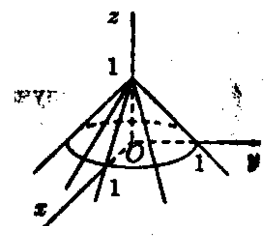

Рис. 211

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими точками.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Рассмотрим, например, функцию $z = xy$. Для нее точка O(0; 0) является критической (в ней $z_x^{/}=y$ и $z_y^{/}=x$ обращаются в ноль). Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет, т. к. в достаточно малой окрестности точки O(0;0) найдутся точки для которых $z > 0$ (точки I и III четвертей) и $z < 0$ (точки II и IV четвертей).

Таким образом, для нахождения экстремумов функции в данной области необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

Теорема 6 (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке {xo;yo) и некоторой ее окрестности функция $f(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0;y_0)$ значения A = $f_{xx}^{//}(x_0;y_0)$. B = $f_{xy}^{//}(x_0;y_0)$, C = $f_{yy}^{//}(x_0;y_0)$. Обозначим

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$$

Тогда:

1.если $\Delta > 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ имеет экстремум: максимум, если A < 0; минимум, если A > 0;

2. если $\Delta < 0$, то функция $f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0;y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примем без доказательства.

Пример 46.1. Найти экстремум функции $z=3x^2y-x^3-y^4$

O Решение: Здесь $z_x^{/}=6xy-3x^2, z_y^{/}=3x^2-4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки M_1 (6; 3) и $M_2(0;0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции:

$. z''_{xx} = 6y - 6x, z''_{xy} = 6x, z''_{yy} = -12y^2$.

В точке M_1 (6; 3) имеем: A = -18, B = 36, C = -108, отсюда

$AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 648,$ т.е. $\Delta > 0$.

Так как A < O, то в точке M_1 функция имеет локальный максимум:

$z_{\max} = z(6;3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27.$

В точке $M2(0;0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и, значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции z в точке M_2 равно нулю: $z(0; 0) = 0$. Можно заметить, что $z = - y^4 < 0$ при $x = 0$, у $\neq 0$; $z = - x^3 > 0$ при

$x < 0$, $y = 0$. Значит, в окрестности точки M_2 (0; 0) функция z принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке M_2 функция экстремума не имеет.

§ 2 Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего M и наименьшего m значений (т. н. глобальный экстремум). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x; y)$ состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в них;
2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на границах области;
3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

Пример 46.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = x^2y + xy^2 + xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями:

$y = \dfrac{1}{x},$

$x = 1$, $x = 2$, $y = -1{,}5$ (см. рис. 212).

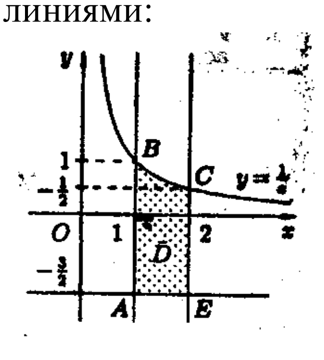

Рис. 212

О Решение: Здесь $z'_x = 2xy + y^2 + y, z'_y = x^2 + 2xy + x.$

1. Находим все критические точки:

$$\begin{cases} y(2x + y + 1) = 0, \\ x(x + 2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются точки (0;0), (-1;0), (0;-1), $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Ни одна из найденных точек не принадлежит области $\overline{D}$.

2.Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков *AB*, *BC*, *CE* и *EA* (рис. 212).

На участке *AB*: $x = 1$, $z = y^2 + 2y$, где $y \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$,

$z_y^{/} = 2y + 2$, $2y + 2 = O$, $y = -1$. Значения функции $z(-1) = -1$,

$z\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}, z(1) = 3.$

На участке *BC*: $y = \frac{1}{x}, z = x + \frac{1}{x} + 1,$, где $x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$,

$z_x^{/} = 1 - \frac{1}{x^2}, 1 - \frac{1}{x^2} = 0, x_1 = 1, x_2 = -1 \notin [1;2]$. Значения функции

$z(1) = 3$, $z(2) = 3{,}5$.

На участке *CE*: $x = 2$, $z = 2y^2 + 6y$, $y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$,

$z_y^{/} = 4y + 6, 4y + 6 = 0, y = -\frac{3}{2}.$ Значения функции $z\left(-\frac{3}{2}\right) = -4{,}5,\ z\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5.$

На участке *AE*: $y = -\frac{3}{2}, z = -\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{4}x, x \in [1;2],$

$z_x^{/} = -3x + \frac{3}{4}, -3x + \frac{3}{4} = 0, x = \frac{1}{4} \notin [1;2].$ Значения функции

$z(1) = -\frac{3}{4}, z(2) = -4{,}5.$

3. Сравнивая полученные результаты, имеем: $M = +3{,}5 = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = z(C);$

а $m = -4{,}5 = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = z(E).$